第 12 講　接線など

12

［A］ A，B を $AB\neq 0$ を満たす定数とする．2 次曲線 C：$Ax^2+By^2=1$ 上の点 A$(\alpha,\ \beta)$ における接線の方程式は $A\alpha x+B\beta y=1$ となることを示せ.

［B］ 次の各問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{3\pi}{4}$ の a を適当にとって，$y=\sin^2 x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=\cos(x-a)$ のグラフが共有点で共通の接線をもつようにする．このとき $\sin a$ の値を求めよ.

(2) xy 平面上の 2 つの曲線

$$\begin{cases} C_1：y=-e^{-x} \\ C_2：y=e^{ax}\ （ただし，a>0） \end{cases}$$

のどちらにも接する直線を l とする．l が C_1 に接する点の x 座標を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 12 講　接線など

12　a, b を実数とする．2 つの関数

$$f(x)=\log(x^2+1)$$
$$g(x)=ax^2+b \quad (a\neq 0)$$

について，曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致する条件を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 12 講　接線など

12

［A］ A, B を $AB\neq 0$ を満たす定数とする．２次曲線 C：$Ax^2+By^2=1$ 上の点 A$(\alpha,\ \beta)$ における接線の方程式は $A\alpha x+B\beta y=1$ となることを示せ．

［B］ 次の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{3\pi}{4}$ の a を適当にとって，$y=\sin^2 x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=\cos(x-a)$ のグラフが共有点で共通の接線をもつようにする．このとき $\sin a$ の値を求めよ．

(2) xy 平面上の２つの曲線

$$\begin{cases} C_1：y=-e^{-x} \\ C_2：y=e^{ax}\ (ただし，a>0) \end{cases}$$

のどちらにも接する直線を l とする．l が C_1 に接する点の x 座標を求めよ．

【答】 ［A］ 略

［B］ (1) $\sin a=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$　(2) $-1-\dfrac{\log a}{a+1}$

【解説】

［A］ $Ax^2+By^2=1$ の両辺を x で微分すると $2Ax+2By\dfrac{dy}{dx}=0$ となるが，これに $(x,\ y)=(\alpha,\ \beta)$ を代入すると $2A\alpha+2B\beta\dfrac{dy}{dx}=0\iff(A\alpha,\ B\beta)\cdot\left(1,\ \dfrac{dy}{dx}\right)=0$ より，接線の法線ベクトルが $(A\alpha,\ B\beta)$ であることがわかる．

よって点 A における接線の方程式は $A\alpha(x-\alpha)+B\beta(y-\beta)=0$

ゆえに $A\alpha x+B\beta y=1$

［B］ (1) $f(x)=\sin^2 x$，$g(x)=\cos(x-a)$ とおくと，

$$f'(x)=2\sin x\cos x,\qquad g'(x)=-\sin(x-a)$$

より，共有点の x 座標を $\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$$

$$\iff\begin{cases} \sin^2\alpha=\cos(\alpha-a) \\ 2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin(\alpha-a) \end{cases}$$

$$\iff\begin{cases} \sin^2\alpha=\cos\alpha\cos a+\sin\alpha\sin a & \cdots\cdots① \\ 2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin\alpha\cos a+\cos\alpha\sin a & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①×$\sin\alpha$＋②×$\cos\alpha$ より，

$$\sin^3\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\sin a$$

$$\therefore\quad \sin\alpha(2-\sin^2\alpha)=\sin a\quad\cdots\cdots③$$

同様に，①×$\cos\alpha$－②×$\sin\alpha$ より，

$$-\sin^2\alpha\cos\alpha=\cos a\quad\cdots\cdots④$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

③^2＋④^2 より　$\sin^2 a+\cos^2 a=1$ を用いて

$$\sin^2\alpha(2-\sin^2\alpha)^2+\sin^4\alpha\cos^2\alpha=1$$

$\sin^2\alpha=t$ とおくと

$$t(2-t)^2+t^2(1-t)=1$$

$$\Longleftrightarrow\quad (3t-1)(t-1)=0$$

$0<t<1$ より $t=\dfrac{1}{3}$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって③より

$$\sin a=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2-\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{9}}$$

(2)　$f(x)=-e^{-x}$，$g(x)=e^{ax}$ とおくと $f'(x)=e^{-x}$，$g'(x)=ae^{ax}$ より l と C_1，C_2 との接点の x 座標をそれぞれ α，β とすると l は

$$y=e^{-\alpha}(x-\alpha)-e^{-\alpha}=e^{-\alpha}x-(\alpha+1)e^{-\alpha}$$

$$y=ae^{a\beta}(x-\beta)+e^{a\beta}=ae^{a\beta}x+(1-a\beta)e^{a\beta}$$

と表せるので

$$\begin{cases} e^{-\alpha}=ae^{a\beta} & \cdots\cdots① \\ -(\alpha+1)e^{-\alpha}=(1-a\beta)e^{a\beta} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

となる．①を②へ代入すると

$$②\quad\Longleftrightarrow\quad -(\alpha+1)\cdot ae^{a\beta}=(1-a\beta)e^{a\beta}$$

$$\Longleftrightarrow\quad (1+a+a\alpha-a\beta)e^{a\beta}=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad 1+a+a\alpha-a\beta=0$$

$$\therefore\quad \beta=\alpha+1+\frac{1}{a}$$

このとき　$a>0$ より

$$①\quad\Longleftrightarrow\quad e^{-\alpha}=ae^{a\left(\alpha+1+\frac{1}{a}\right)}$$

$$\Longleftrightarrow\quad e^{-\alpha}=ae^{a\alpha+a+1}$$

$$\Longleftrightarrow\quad -\alpha=\log a+(a\alpha+a+1)$$

$$\Longleftrightarrow\quad (a+1)\alpha=-(a+1+\log a)$$

$$\therefore\quad \alpha=\boldsymbol{-1-\frac{\log a}{a+1}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　接線など

12　a，b を実数とする．2つの関数

$$f(x)=\log(x^2+1)$$
$$g(x)=ax^2+b \quad (a\neq 0)$$

について，曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が共有点をもち，その点における2曲線の接線が一致する条件を求めよ．

【答】　$b=0$ または $b=a-\log a-1$ $(0<a<1)$

【解説】

共有点の x 座標を α とおくと

$$f(\alpha)=g(\alpha) \text{ かつ } f'(\alpha)=g'(\alpha)$$
$$\iff \begin{cases} \log(\alpha^2+1)=a\alpha^2+b & \cdots\cdots① \\ \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}=2a\alpha & \cdots\cdots② \end{cases}$$

ここで

$$② \iff \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}\{1-a(\alpha^2+1)\}=0$$
$$\iff \alpha=0 \text{ または } a(\alpha^2+1)=1$$

$\alpha=0$ のとき①より $b=0$　このとき a は任意.

$$a(\alpha^2+1)=1 \iff \alpha^2=\frac{1}{a}-1$$

これを，$\dfrac{1}{a}-1>0 \iff 0<a<1$ に注意しながら①へ代入して

$$① \iff \log\frac{1}{a}=a\left(\frac{1}{a}-1\right)+b$$
$$\iff b=a-\log a-1$$

よって

$$\boldsymbol{b=0 \text{ または } b=a-\log a-1 \ (0<a<1)}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。